13. ročník Žilina 1. – 3. 7. 2025
Otvorený softvér vo vzdelávaní, výskume a v IT riešeniach
ossconf.fri.uniza.sk
OSSConf 2025: 1–6

Maximum bloků v klasickém sudoku

PAVEL STŘÍŽ (CZ) a ŠTEFAN PEŠKO (SK)

Abstrakt. Článek představuje klíčové výsledky úlohy maxima bloků v klasickém sudoku 9×9, ať už bloky vnitřní nebo všechny (vnitřní+plovoucí). Analyzovali jsme všechna neizomorfní sudoku, užili jsme v průměru 300 procesorů po dobu 7 týdnů.

Klíčová slova. Výpočty přes CPU, klasické sudoku, maximum bloků v sudoku.

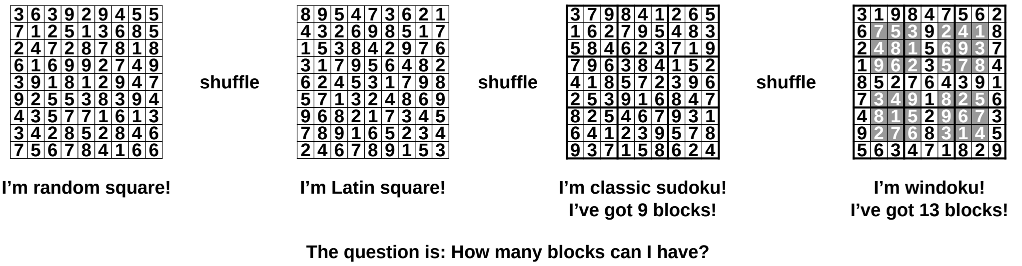
MAXIMUM BLOCKS IN CLASSIC SUDOKU

Abstract. The paper presents the key findings of maximum number of inner and all (inner+floating) blocks in classic sudoku 9×9. We analyzed all non-isomorphic sudokus, on average we used 300 CPUs, they computed the task for 7 weeks.

Keywords. CPU computing, classic sudoku, maximum blocks in sudoku.

1. Úloha maxima bloků v sudoku

Na konferenci OSSConf 2024 jsem prezentoval úlohy a mé pokroky kolem sudoku a generování kombinovaného sudoku. Během diskuze po přednášce docent Štefan Peško zmínil neřešenou úlohu nalezení maxima bloků v klasickém sudoku. Situaci si můžeme ilustrovat následujícím schématem.



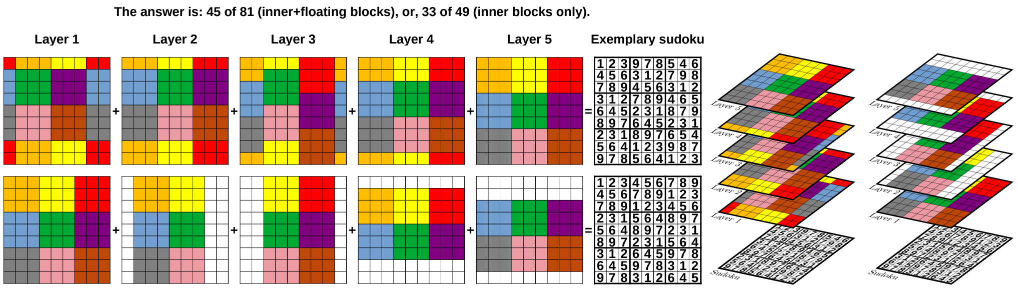
Pokud umisťujeme cifry 1–9 náhodně dostáváme první tabulku. Pokud se mohou cifry 1–9 v řádku a sloupci opakovat právě jednou, dostáváme se na pole Latinských čtverců. Žádný blok se nezvažuje. Pokud takovou podmínku nastavíme i na 9 nepřekrývajících se bloků velikosti 3×3, dostáváme se ke klasickému sudoku. Pokud bychom dodali další čtyři bloky, dostáváme se k variantě známé jako Windoku. Počet bloků je 13, všechny jsou vnitřní. Takových vnitřních bloků, které se mohou překrývat, existuje $7 \times 7 = 49$.

Pokud bychom dovolili, aby blok přebíhal ze začátku řádku na konec, či podobně u sloupců, pak takové bloky nazýváme plovoucí. Celkový počet možných bloků je $9 \times 9 = 81$, 49 vnitřních a 32 plovoucích.

Naši úlohou je zjistit, kolik bloků ze 49 vnitřních lze užít, aby sudoku bylo platné. Podobně, kolik bloků ze všech 81 lze použít, aby sudoku bylo stále platné.

2. Přístup k řešení

Na tomto místě přeskočíme logické úvahy k vyřešení. Za pomoci lineárního programování brzy zjistíme, že řešení je 33 bloků ze 49 u první varianty úlohy, a 45 z 81 bloků u druhé varianty úlohy. Zde jsou ukázky, od každé varianty jedna. Zkusili jsme vysázet i obrázek s použitím vrstvení pro lepší názornost.



3. Výpočetní část

Zjistit maximum bloků bylo relativně snadné, zjistit která neizomorfní sudoku tomu odpovídají je trochu jiná liga. Zkusíme shrnout naše postřehy. Upravili jsme program `sudoku2.cc` z `http://www.afjarvis.org.uk/sudoku/bertram.html`, a to především tak, že prohazování řádků (2. a 3. superřádek), sloupců (2. a 3. supersloupec), 2. a 3. superřádků a 2. a 3. supersloupců aplikujeme na každé vygenerované sudoku. Generované sudoku jsme nazývali matkami, z prohazování vznikalo $3!^4 \cdot 2 \cdot 2 = 5184$ dětí. Jinými slovy: ohodnotíme každé existující neizomorfní sudoku a zjistíme u něj, kolik různých bloků obsahuje. Dosáhneme-li na maximum bloků (33, resp. 45), je to pro nás žádaný nález. Izomorfismus (proházení cifer 1–9) zachovává počet bloků i platnost sudoku.

Na jednom jádru vycházely výpočty kolem 900 let. Bylo tedy potřeba výpočty rozhodit na víc počítačů, distribuovat. Honza Šustek z Ostravy nám poradil, ať výpočet spustíme dle počtu jader výpočetního stroje. Další tip nám poslal Miroslav Červenka z Brna, že je dobré si hlídat vlákna na jádro, a spustit úlohu jen na jednom jádru, že si časově moc nepomůžeme. Další jeho postřeh byl, že je potřeba spouštěnou úlohu navázat na jádro, to umí program `taskset` z linuxového balíku `util-linux`.

Ani s pomocí půjčených výpočetních strojů od kamarádů se nám nepodařilo výpočty stáhnout pod roky počítání. Vyzkoušeli jsme několik platforem, bohužel častokrát nám administrátoři či majitelé serverů omezili či úplně zastavili výpočty. Některé platformy byly tak drahé, že ty jsme ani nezkoušeli. Koupili jsme několik 12jádrových serverů, ale klíčové bylo až zakoupení virtuálních serverů na `https://compute.cudo.org/`, kde jsme se dostali až na 250 koupených jader.

U fyzických serverů jsme párování vláken hledali metodou pokus-omyl, až po bitvě jsme našli řešení, že tyto vztahy lze vyčíst z `/sys/devices/system/cpu/cpuN/topology/thread_siblings_list`, kde za `N` patří číslo jádra. Další možnost byla užít program `cpu-info` z linuxového balíku `cpuinfo`. Zde jsou ještě některé jiné možnosti.

```
lscpu -e  # knihovna cpuinfo
lscpu -p  # knihovna cpuinfo
lstopo --of console  # knihovna hwloc
cat /sys/devices/system/cpu/cpu*/topology/thread_siblings_list|sort|uniq
```

4. Optimalizace kódu

Pořád to nebylo ono. Michal Kaukič z Žiliny poradil, ať se podíváme na optimalizaci kódu. Některé věci v C++ byly zřejmé, namátkou: vyhnout se třídění malého počtu dat, vypnout průběžné výpisy na terminál, pokusit se podmínky If převést na práci s poli apod.

Klíčové však bylo jiné zjištění. Jak zjišťujeme počet bloků, dochází ke sčítání čísel, které se častokrát opakují. Uvedeme školní příklad.

```
1+2+3+4+5
1+2+3+6+7
1+2+3+8+9
```

V této ukázce použijeme operaci sčítání celkem dvanáctkrát (tři řádky po čtyřech). To však můžeme přepsat takto:

```
X=1+2+3
 X +4+5
 X +6+7
 X +8+9
```

Nyní operaci sčítání použijeme jen osmkrát, s tím, že `X` si ukládáme do paměti, která nebyla pro nás problém.

Podrobnější zkoumání ukázalo, že se u sudoku dá shlukovat po devíti z možných 81 mezivýpočtů, a následně dvoustupňově, ještě dále tyto mezisoučty shlukovat. Tato banální úvaha eliminovat počet operací sčítání výrazně časově pomohla a dostala nás z let na měsíce počítání. Jinými slovy: počítače jsou výborné v počítání, ale ještě lepší možnost je nepočítat vůbec.

5. Otevřené otázky

Ačkoliv se nám úlohu podařilo spočítat, máme stále několik úvah.

- Zda-li použité shlukování skrz úsporu operací sčítání by se nedalo využít ještě efektivněji s ohledem na zkoumaný problém. Jako optimalizační úloha shlukování se to ukázalo jako nepočítatelné pro všechny možné shluky. Je ale možné, že zde prostor byl.
- Úlohu vnitřních a všech bloků jsme měli ve dvou programech, podařilo se nám je spojit do jednoho. K větší úspoře už nedošlo, ale je stále otázka, jestli jsme něco neopomenuli.
- Úloha maxima bloků v sudoku se dá přepsat do maticového počtu, ale nedokázali jsme toho využít.
- Je také otázka, jestli by tato konkrétní úloha nebyla vhodná pro GPU. K tomuto experimentu jsme se též nedostali.
- Jako u každého výpočtu, hodilo by se nezávislé ověření jinou skupinou lidí. Neměli jsme koho oslovit.

6. Nalezená sudoku

Neizomorfních sudoku, která splňují podmínku maxima vnitřních bloků, jsme nalezli 28. Jsou to tato:

1. 123456789456789123789123456231564897564897231897231564312645978645978312978312645
2. 123456789456789123789123456312645978645978312978312645231564897564897231897231564
3. 123789456456123789789456123231897564564231897897564231312978645645312978978645312
4. 123789456456123789789456123312978645645312978978645312231897564564231897897564231
5. 123456789456789123789123456231564978564978231978231564312645897645897312897312645
6. 123456789456789123789123456312645897645897312897312645231564978564978231978231564
7. 123789456456123789789456123231978564564231978978564231312897645645312897897645312
8. 123789456456123789789456123312897645645312897897645312231978564564231978978564231
9. 123456789456789123789123456231645897645897231897231645312564978564978312978312564
10. 123456789456789123789123456312564978564978312978312564231645897645897231897231645
11. 123789456456123789789456123231897645645231897897645231312978564564312978978564312
12. 123789456456123789789456123312978564564312978978564312231897645645231897897645231
13. 123456789456789123789123456231645978645978231978231645312564897564897312897312564
14. 123456789456789123789123456312564897564897312897312564231645978645978231978231645
15. 123789456456123789789456123231978645645231978978645231312897564564312897897564312
16. 123789456456123789789456123312897564564312897897564312231978645645231978978645231
17. 123459786456783129789126453231594867564837291897261534312945678645378912978612345
18. 123459786456783129789126453312945678645378912978612345231594867564837291897261534
19. 123786459456129783789453126231867594564291837897534261312678945645912378978345612
20. 123786459456129783789453126312678945645912378978345612231867594564291837897534261
21. 123486759456729183789153426231864597564297831897531264312648975645972318978315642
22. 123486759456729183789153426312648975645972318978315642231864597564297831897531264
23. 123759486456183729789426153231597864564831297897264531312975648645318972978642315
24. 123759486456183729789426153312975648645318972978642315231597864564831297897264531
25. 123489756456723189789156423231894567564237891897561234312948675645372918978615342
26. 123489756456723189789156423312948675645372918978615342231894567564237891897561234
27. 123756489456189723789423156231567894564891237897234561312675948645918372978342615
28. 123756489456189723789423156312675948645918372978342615231567894564891237897234561

V online verzi sborníku je výpis neizomorfních sudoku, která splňují podmínku maxima všech bloků. Je jich 632.

1. 123789456456123789789456123267834591591267834834591267672348915915672348348915672
2. 123789456456123789789456123672348915915672348348915672267834591591267834834591267
3. 123456789456789123789123456294537861537861294861294537915348672348672915672915348
4. 123456789456789123789123456915348672348672915672915348294537861537861294861294537
5. 123789456456123789789456123537294861861537294294861537672348915915672348348915672
6. 123789456456123789789456123672348915915672348348915672537294861861537294294861537
7. 123456789456789123789123456231564897564897231897231564915348672348672915672915348
8. 123456789456789123789123456915348672348672915672915348231564897564897231897231564
9. 123789456456123789789456123267834591591267834834591267618375942942618375375942618
10. 123789456456123789789456123618375942942618375375942618267834591591267834834591267
11. 123456789456789123789123456834267591267591834591834267942375618375618942618942375
12. 123456789456789123789123456942375618375618942618942375834267591267591834591834267
13. 123456789456789123789123456294537861537861294861294537942375618375618942618942375
14. 123456789456789123789123456942375618375618942618942375294537861537861294861294537
15. 123789456456123789789456123231897564564231897897564231618375942942618375375942618
16. 123789456456123789789456123618375942942618375375942618231897564564231897897564231
17. 123456789456789123789123456834267591267591834591834267312645978645978312978312645
18. 123456789456789123789123456312645978645978312978312645834267591267591834591834267
19. 123789456456123789789456123537294861861537294294861537312978645645312978978645312
20. 123789456456123789789456123312978645645312978978645312537294861861537294294861537
21. 123456789456789123789123456231564897564897231897231564312645978645978312978312645
22. 123456789456789123789123456312645978645978312978312645231564897564897231897231564
23. 123789456456123789789456123231897564564231897897564231312978645645312978978645312
24. 123789456456123789789456123312978645645312978978645312231897564564231897897564231
25. 123789456456123789789456123268374591591268374374591268617835942942617835835942617
26. 123789456456123789789456123617835942942617835835942617268374591591268374374591268
27. 123456789456789123789123456294538671538671294671294538915347862347862915862915347
28. 123456789456789123789123456915347862347862915862915347294538671538671294671294538
29. 123456789456789123789123456231564978564978231978231564312645897645897312897312645
30. 123456789456789123789123456312645897645897312897312645231564978564978231978231564
31. 123789456456123789789456123231978564564231978978564231312897645645312897897645312
32. 123789456456123789789456123312897645645312897897645312231978564564231978978564231

317. 123459786456783129789126453231594867564837291897261534615348972948672315372915648
318. 123459786456783129789126453615348972948672315372915648231594867564837291897261534
319. 123786459456129783789453126537264891291837564864591237312678945948315672675942318
320. 123786459456129783789453126312678945948315672675942318537264891291837564864591237
321. 123786459456129783789453126231867594597234861864591237312678945948315672675942318
322. 123786459456129783789453126312678945948315672675942318231867594597234861864591237
323. 123786459456129783789453126231867594564291837897534261312678945948315672675942318
324. 123786459456129783789453126312678945948315672675942318231867594564291837897534261
325. 123459786456783129789126453264537891837291564591864237615348972342975618978612345
326. 123459786456783129789126453615348972342975618978612345264537891837291564591864237
327. 123459786456783129789126453264537891531894267897261534615348972342975618978612345
328. 123459786456783129789126453615348972342975618978612345264537891531894267897261534
329. 123459786456783129789126453231594867564837291897261534615348972342975618978612345
330. 123459786456783129789126453615348972342975618978612345231594867564837291897261534
331. 123459786456783129789126453264537891597861234831294567642375918975618342318942675
332. 123459786456783129789126453642375918975618342318942675264537891597861234831294567
333. 123459786456783129789126453834297561267531894591864237642375918975618342318942675
334. 123459786456783129789126453642375918975618342318942675834297561267531894591864237
335. 123459786456783129789126453264537891837291564591864237642375918975618342318942675
336. 123459786456783129789126453642375918975618342318942675264537891837291564591864237
337. 123459786456783129789126453834297561267531894591864237642375918315948672978612345
338. 123459786456783129789126453642375918315948672978612345834297561267531894591864237
339. 123459786456783129789126453264537891837291564591864237642375918315948672978612345
340. 123459786456783129789126453642375918315948672978612345264537891837291564591864237
341. 123459786456783129789126453834297561267531894591864237312945678645378912978612345
342. 123459786456783129789126453312945678645378912978612345834297561267531894591864237
343. 123786459456129783789453126537264891861597234294831567972348615315672948648915372
344. 123786459456129783789453126972348615315672948648915372537264891861597234294831567
345. 123786459456129783789453126297834561531267894864591237972348615315672948648915372
346. 123786459456129783789453126972348615315672948648915372297834561531267894864591237
347. 123786459456129783789453126537264891291837564864591237972348615315672948648915372
348. 123786459456129783789453126972348615315672948648915372537264891291837564864591237

33. 123789456456123789789456123537248961961537248248961537672394815815672394394815672
34. 123789456456123789789456123672394815815672394394815672537248961961537248248961537
35. 123456789456789123789123456934267518267518934518934267842375691375691842691842375
36. 123456789456789123789123456842375691375691842691842375934267518267518934518934267
37. 123456789456789123789123456295347861347861295861295347914538672538672914672914538
38. 123456789456789123789123456914538672538672914672914538295347861347861295861295347
39. 123456789456789123789123456834275691275691834691834275942367518367518942518942367
40. 123456789456789123789123456942367518367518942518942367834275691275691834691834275
41. 123789456456123789789456123637294815815637294294815637572348961961572348348961572
42. 123789456456123789789456123572348961961572348348961572637294815815637294294815637
43. 123456789456789123789123456231645897645897231897231645312564978564978312978312564
44. 123456789456789123789123456312564978564978312978312564231645897645897231897231645
45. 123789456456123789789456123231897645645231897897645231312978564564312978978564312
46. 123789456456123789789456123312978564564312978978564312231897645645231897897645231
47. 123789456456123789789456123267835941941267835835941267618374592592618374374592618
48. 123789456456123789789456123618374592592618374374592618267835941941267835835941267
49. 123456789456789123789123456295348671348671295671295348914537862537862914862914537
50. 123456789456789123789123456914537862537862914862914537295348671348671295671295348
51. 123789456456123789789456123268375941941268375375941268617834592592617834834592617
52. 123789456456123789789456123617834592592617834834592617268375941941268375375941268
53. 123456789456789123789123456231645978645978231978231645312564897564897312897312564
54. 123456789456789123789123456312564897564897312897312564231645978645978231978231645
55. 123789456456123789789456123231978645645231978978645231312897564564312897897564312
56. 123789456456123789789456123312897564564312897897564312231978645645231978978645231
57. 123456789456789123789123456934275618275618934618934275842367591367591842591842367
58. 123456789456789123789123456842367591367591842591842367934275618275618934618934275
59. 123789456456123789789456123637248915915637248248915637572394861861572394394861572
60. 123789456456123789789456123572394861861572394394861572637248915915637248248915637
61. 123456798456789123789123465312645879645897312897312654231564987564978231978231546
62. 123798456456123789789465123312879645645312897897654312231987564564231978978546231
63. 123798456456123789789465123537284961961537248248916537672349815815672394394851672
64. 123456798456789123789123465934267581267518934518934276842375619375691842691842357
65. 123456798456789123789123465942367581367518942518942376834275619275691834691834257
66. 123798456456123789789465123572384961961572348348916572637249815815637294294851637
67. 123456798456789123789123465231645879645897231897231654312564987564978312978312546
68. 123798456456123789789465123231879645645231897897654231312987564564312978978546312
69. 123879456456123789789546123617385942942617835835492617268734591591268374374951268
70. 123456879456789123789123546915347682347862915862915437294538761538671294671294358
71. 123456879456789123789123546231564798564978231978231654312645987645897312897312465
72. 123879456456123789789546123231798564564231978978654231312987645645312897897465312
73. 123456879456789123789123546295347681347861295861295437914538762538672914672914358
74. 123456879456789123789123546312564798564978312978312654231645987645897231897231465
75. 123879456456123789789546123312798564564312978978654312231987645645231897897465231
76. 123879456456123789789546123267385941941267835835491267618734592592618374374952618
77. 123456978456789123789123645312645789645897312897312564231564897564978231978231456
78. 123978456456123789789645123312789645645312897897564312231897564564231978978456231
79. 123456978456789123789123645231645789645897231897231564312564897564978312978312456
80. 123978456456123789789645123231789645645231897897564231312897564564312978978456312
81. 123456978456789123789123564231564789564897231897231645312645897645978312978312456
82. 123978456456123789789564123231789564564231897897645231312897645645312978978456312
83. 123456978456789123789123564312564789564897312897312645231645897645978231978231456
84. 123978456456123789789564123312789564564312897897645312231897645645231978978456231
85. 123456897456789123789123564231564789564978231978231645312645978645897312897312456
86. 123897456456123789789564123231789564564231978978645231312978645645312897897456312
87. 123456897456789123789123564312564789564978312978312645231645978645897231897231456
88. 123897456456123789789564123312789564564312978978645312231978645645231897897456231
89. 123456897456789123789123645312645789645978312978312564231564978564897231897231456
90. 123897456456123789789645123312789645645312978978564312231978564564231897897456231
91. 123456897456789123789123645231645789645978231978231564312564978564897312897312456
92. 123897456456123789789645123231789645645231978978564231312978564564312897897456312
93. 123465789456789123789132456834257691275691834691843275942376518367518942518924367
94. 123789465456123789789456132637294851815637294294815673572348916961572348348961527
95. 123465789456789123789132456312546978564978312978321564231654897645897231897213645
96. 123789465456123789789456132312978546564312978978564321231897654645231897897645213
97. 123465789456789123789132456312546897564897312897321564231654978645978231978213645
98. 123789465456123789789456132312897546564312897897564321231978654645231978978645213
99. 123465789456789123789132456934257618275618934618943275842376591367591842591824367
100. 123789465456123789789456132637248951915637248248915673572394816861572394394861527
101. 123465798456789132789132456312546879564897321897321564231654987645978213978213645
102. 123798465456132789789456132312879546564321897897564321231987654645213978978645213
103. 123465798456789132789132456934257681275618943618943275842376519367591824591824367
104. 123798465456132789789456132637284951915673248248915673572349816861527394394861527
105. 123456798456798132789132456312645879645879321897321645231564987564987213978213564
106. 123798456456132798789456132312879645645321879897645321231987564564213987978564213
107. 123798456456132798789456132537284961961573284248961573672349815815627349394815627
108. 123456798456798132789132456934267581267581943518943267842375619375619824691824375
109. 123456798456798132789132456312564879564879321897321564231645987645987213978213645
110. 123798456456132798789456132312879564564321879897564321231987645645213987978645213
111. 123456798456798132789132456934275681275681943618943275842367519367519824591824367
112. 123798456456132798789456132637284915915673284248915673572349861861527349394861527
113. 123456798456798123789132465312645879645879312897321654231564987564987231978213546
114. 123798456456123798789465132312879645645312879897654321231987564564231987978546213
115. 123798456456123798789465132537284961961537284248916573672349815815672349394851627
116. 123456798456798123789132465934267581267581934518943276842375619375619842691824357
117. 123465879456789123789132546312546798564978312978321654231654987645897231897213465
118. 123879465456123789789546132312798546564312978978654321231987654645231897897465213
119. 123465897456789132789132546312546789564978321978321654231654978645897213897213465
120. 123897465456132789789546132312789546564321978978654321231978654645213897897465213
121. 123456978456798123789132645312645789645879312897321564231564897564987231978213456
122. 123978456456123798789645132312789645645312879897564321231897564564231987978456213
123. 123456978456798123789132564312564789564879312897321645231645897645987231978213456
124. 123978456456123798789564132312789564564312879897645321231897645645231987978456213
125. 123465978456789132789132546312546789564897321897321654231654897645978213978213465
126. 123978465456132789789546132312789546564321897897654321231897654645213978978465213
127. 123456978456798132789132546312564789564879321897321654231645897645987213978213465
128. 123978456456132798789546132312789564564321879897654321231897645645213987978465213
129. 123546789456789123789213456914358672538672914672194538295437861347861295861925347
130. 123546789456789123789213456231465897645897231897321645312654978564978312978132564
131. 123789546456123789789456213231897465645231897897645321312978654564312978978564132
132. 123789546456123789789456213618374952592618374374592168267835491941267835835941627
133. 123546789456789123789213456914357862537862914862194537295438671348671295671925348
134. 123789546456123789789456213617834952592617834834592167268375491941268375375941628
135. 123546789456789123789213456231465978645978231978321645312654897564897312897132564
136. 123789546456123789789456213231978465645231978978645321312897654564312897897564132
137. 123546879456789213789213456914357682537862194862194537295438761348671925671925348
138. 123879546456213789789456213617384952592167834834592167268735491941628375375941628
139. 123546879456789213789213456231465798645978321978321645312654987564897132897132564
140. 123879546456213789789456213231798465645321978978645321312987654564132897897564132
349. 123786459456129783789453126537264891861597234294831567312678945975342618648915372
350. 123786459456129783789453126312678945975342618648915372537264891861597234294831567
351. 123786459456129783789453126537264891291837564864591237312678945975342618648915372
352. 123786459456129783789453126312678945975342618648915372537264891291837564864591237
353. 123786459456129783789453126537264891861597234294831567312678945645912378978345612
354. 123786459456129783789453126312678945645912378978345612537264891861597234294831567
355. 123786459456129783789453126231867594597234861864591237312678945975342618648915372
356. 123786459456129783789453126312678945975342618648915372231867594597234861864591237
357. 123459786456783129789126453264537891531894267897261534642375918315948672978612345
358. 123459786456783129789126453642375918315948672978612345264537891531894267897261534
359. 123459786456783129789126453231594867564837291897261534312945678645378912978612345
360. 123459786456783129789126453312945678645378912978612345231594867564837291897261534
361. 123786459456129783789453126231867594564291837897534261312678945645912378978345612
362. 123786459456129783789453126312678945645912378978345612231867594564291837897534261
363. 123786459456129783789453126231678594598234671674591238312867945947315862865942317
364. 123786459456129783789453126312867945947315862865942317231678594598234671674591238
365. 123459786456783129789126453264538971531974268978261534615347892342895617897612345
366. 123459786456783129789126453615347892342895617897612345264538971531974268978261534
367. 123459786456783129789126453265347891341895267897261345614538972532974618978612534
368. 123459786456783129789126453614538972532974618978612534265347891341895267897261345
369. 123786459456129783789453126231867945947235861865941237312678594598314672674592318
370. 123786459456129783789453126312678594598314672674592318231867945947235861865941237
371. 123459786456783129789126453265348971341975268978261345614537892532894617897612534
372. 123459786456783129789126453614537892532894617897612534265348971341975268978261345
373. 123786459456129783789453126231678945948235671675941238312867594597314862864592317
374. 123786459456129783789453126312867594597314862864592317231678945948235671675941238
375. 123945678456781239789236451231459786597862314864317592312594867948673125675128943
376. 123945678456781239789236451231459786564817392897362514312594867948673125675128943
377. 123945678456781239789236451231459786597862314864317592312594867975628143648173925
378. 123945678456781239789236451231459786564817392897362514312594867645178923978623145
379. 123678945456239781789451236231786459564392817897514362312867594645923178978145623
380. 123945867456781239789236451231459786598672314674318592312594678947863125865127943
381. 123945867456782319789316452312459786598671234674238591231594678947863125865127943
382. 123945678456782319789316452312459786597861234864237591231594867948673125675128943
383. 123495867456872139789316542312549786564728391978631254231954678645287913897163425
384. 123867495456139872789542316312786549564391728978254631231678954645913287897425163
385. 123876549456219783789453216917384652532167894864592137298735461341628975675941328
386. 123549876456783219789216453614357982597862134832194567265438791948671325371925648
387. 123549876456783219789216453614357982532894167897162534265438791341975628978621345
388. 123876549456219783789453216231768495948325671675941328312687954597134862864592137
389. 123549876456783219789216453231495768645378921978621345312954687564837192897162534
390. 123876549456219783789453216231768495645921378978345621312687954564192837897534162
391. 123459876456873129789216543615347982947682315832195467264538791598761234371924658
392. 123876459456129873789543216917385642342617985865492137298734561531268794674951328
393. 123876459456129873789543216312687945947315682865492137231768594598234761674951328
394. 123459876456873129789216543264538791531794268978621354615347982342985617897162435
395. 123459876456873129789216543231594768564738291978621354312945687645387912897162435
396. 123876459456129873789543216231768594564291738978354621312687945645912387897435162
397. 123467895456839172789512346312746589564398721978251634231674958645983217897125463
398. 123895467456172839789346512312589746564721398978634251231958674645217983897463125
399. 123859476456173829789246513647312985915687342832495167598764231261538794374921658
400. 123859476456173829789246513615387942947612385832495167268534791591768234374921658
401. 123476859456829173789513246917345682342687915865192437294738561538261794671954328
402. 123476859456829173789513246231764598564298731978351624312647985645982317897135462
403. 123859476456173829789246513231598764564731298978624351312985647645317982897462135
404. 123476958456928173789531264231764589564289731897315642615842397342697815978153426
405. 123958476456173928789264531534781269261539784897642315312895647645317892978426153
406. 123476958456928173789531264231764589564289731897315642312647895645892317978153426
407. 123958476456173928789264531231589764564731289897642315312895647645317892978426153
408. 123846579456719283789253416914387652867592134532164897298435761375621948641978325
409. 123846579456719283789253416914387652537162894862594137298435761341678925675921348
410. 123579846456283719789416253617354982592867134834192567265738491948621375371945628
411. 123846579456719283789253416231468795645971328978325641312684957564197832897532164
412. 123579846456283719789416253231795468645328971978641325312957684564832197897164532
413. 123975648456281739789436251231759486564812397897364512312597864948623175675148923
414. 123648975456739281789251436231486759867592314594317862312864597645973128978125643
415. 123648975456739281789251436231486759564397812897512364312864597645973128978125643
416. 123975648456281739789436251231759486564812397897364512312597864645128973978643125
417. 123468795456739182789152436312846579564397821897521364231684957645973218978215643
418. 123795468456182739789436152312579846564821397897364521231957684645218973978643215
419. 123795468456182739789436152637254981915678243248913675872349516361527894594861327
420. 123795468456182739789436152637254981948613275215978643872349516591867324364521897
421. 123468795456739182789152436934287651275613948618945273542376819867591324391824567
422. 123759486456183729789426153267534891831297564594861237672345918915678342348912675
423. 123759486456183729789426153672345918915678342348912675267534891831297564594861237
424. 123759486456183729789426153267534891591867234834291567672345918915678342348912675
425. 123759486456183729789426153672345918915678342348912675267534891591867234834291567
426. 123759486456183729789426153837294561261537894594861237672345918915678342348912675
427. 123759486456183729789426153672345918915678342348912675837294561261537894594861237
428. 123486759456729183789153426294837561537261894861594237918345672342678915675912348
429. 123486759456729183789153426918345672342678915675912348294837561537261894861594237
430. 123486759456729183789153426231864597564297831897531264918345672342678915675912348
431. 123486759456729183789153426918345672342678915675912348231864597564297831897531264
432. 123759486456183729789426153267534891591867234834291567615378942948612375372945618
433. 123759486456183729789426153615378942948612375372945618267534891591867234834291567
434. 123486759456729183789153426534267891297831564861594237942378615375612948618945372
435. 123486759456729183789153426942378615375612948618945372534267891297831564861594237
436. 123486759456729183789153426294837561537261894861594237942378615375612948618945372
437. 123486759456729183789153426942378615375612948618945372294837561537261894861594237
438. 123486759456729183789153426534267891867591234291834567942378615375612948618945372
439. 123486759456729183789153426942378615375612948618945372534267891867591234291834567
440. 123759486456183729789426153231597864564831297897264531615378942948612375372945618
441. 123759486456183729789426153615378942948612375372945618231597864564831297897264531
442. 123486759456729183789153426534267891297831564861594237942378615318645972675912348
443. 123486759456729183789153426942378615318645972675912348534267891297831564861594237
444. 123486759456729183789153426294837561537261894861594237942378615318645972675912348
445. 123486759456729183789153426942378615318645972675912348294837561537261894861594237
446. 123486759456729183789153426534267891297831564861594237312648975948375612675912348
447. 123486759456729183789153426312648975948375612675912348534267891297831564861594237
448. 123486759456729183789153426534267891261894537897531264942378615318645972675912348
449. 123486759456729183789153426942378615318645972675912348534267891261894537897531264
450. 123486759456729183789153426534267891261894537897531264312648975948375612675912348
451. 123486759456729183789153426312648975948375612675912348534267891261894537897531264
452. 123486759456729183789153426231864597564297831897531264312648975948375612675912348
453. 123486759456729183789153426312648975948375612675912348231864597564297831897531264
454. 123759486456183729789426153267534891831297564594861237615378942972645318348912675
455. 123759486456183729789426153615378942972645318348912675267534891831297564594861237
456. 123759486456183729789426153267534891591867234834291567615378942972645318348912675

141. 123879456456213879789456213617385942942167385835942167268734591591628734374591628
142. 123456879456879213789213456915347682347682195862195347294538761538761924671924538
143. 123456879456879213789213456231564798564798321978321564312645987645987132897132645
144. 123879456456213879789456213231798564564321798978564321312987645645132987897645132
145. 123456879456879213789213456914537682537682194862194537295348761348761925671925348
146. 123879456456213879789456213617384592592167384834592167268735941941628735375941628
147. 123456879456879213789213456231645798645798321978321645312564987564987132897132564
148. 123879456456213879789456213231798645645321798978645321312987564564132987897564132
149. 123546798456789123789213465231465879645897231897321654312654987564978312978132546
150. 123798546456123789789465213231879465645231897897654321312987654564312978978546132
151. 123546978456789213789213465231465789645897321897321654312654897564978132978132546
152. 123978546456213789789465213231789465645321897897654321312897654564132978978546132
153. 123879456456123879789546213617385942942617385835492167268734591591268734374951628
154. 123456879456879123789213546915347682347682915862195437294538761538761294671924358
155. 123456879456879123789213546231564798564798231978321654312645987645987312897132465
156. 123879456456123879789546213231798564564231798978654321312987645645312987897465132
157. 123456897456879123789213564231564789564798231978321645312645978645987312897132456
158. 123897456456123879789564213231789564564231798978645321312978645645312987897456132
159. 123456897456879123789213645231645789645798231978321564312564978564987312897132456
160. 123897456456123879789645213231789645645231798978564321312978564564312987897456132
161. 123546897456789213789213465231465789645978321978321654312654978564897132897132546
162. 123897546456213789789465213231789465645321978978654321312978654564132897897546132
163. 123456897456879213789213465231645789645798321978321654312564978564987132897132546
164. 123897456456213879789465213231789645645321798978654321312978564564132987897546132
165. 123645789456789123789312456312456978564978312978231564231564897645897231897123645
166. 123789645456123789789456312312978456564312978978564231231897564645231897897645123
167. 123645789456789123789312456312456897564897312897231564231564978645978231978123645
168. 123789645456123789789456312312897456564312897897564231231978564645231978978645123
169. 123645798456789132789312456312456879564897321897231564231564987645978213978123645
170. 123798645456132789789456312312879456564321897897564231231987564645213978978645123
171. 123645978456789312789312456312456789564897231897231564231564897645978123978123645
172. 123978645456312789789456312312789456564231897897564231231897564645123978978645123
173. 123465879456879213789231456231546798564798321978312564312654987645987132897123645
174. 123879465456213879789456231231798546564321798978564312312987654645132987897645123
175. 123465897456879231789231456231546789564798312978312564312654978645987123897123645
176. 123897465456231879789456231231789546564312798978564312312978654645123987897645123
177. 123456897456897231789231456231564789564789312978312564312645978645978123897123645
178. 123897456456231897789456231231789564564312789978564312312978645645123978897645123
179. 123456897456897231789231456231645789645789312978312645312564978564978123897123564
180. 123897456456231897789456231231789645645312789978645312312978564564123978897564123
181. 123645789456789123789231456231456897564897231897312564312564978645978312978123645
182. 123789645456123789789456231231897456564231897897564312312978564645312978978645123
183. 123645789456789123789231456231456978564978231978312564312564897645897312897123645
184. 123789645456123789789456231231978456564231978978564312312897564645312897897645123
185. 123645879456789213789231456231456798564978321978312564312564987645897132897123645
186. 123879645456213789789456231231798456564321978978564312312987564645132897897645123
187. 123645897456789231789231456231456789564978312978312564312564978645897123897123645
188. 123897645456231789789456231231789456564312978978564312312978564645123897897645123
189. 123465879456879123789231546231546798564798231978312654312654987645987312897123465
190. 123879465456123879789546231231798546564231798978654312312987654645312987897465123
191. 123456897456897132789312546312564789564789321978231654231645978645978213897123465
192. 123897456456132897789546312312789564564321789978654231231978645645213978897465123
193. 123465879456879123789312546312546798564798312978231654231654987645987231897123465
194. 123879465456123879789546312312798546564312798978654231231987654645231987897465123
195. 123465897456879132789312546312546789564798321978231654231654978645987213897123465
196. 123897465456132879789546312312789546564321798978654231231978654645213987897465123
197. 123645897456789312789312456312456789564978231978231564231564978645897123897123645
198. 123897645456312789789456312312789456564231978978564231231978564645123897897645123
199. 123456897456897312789312456312645789645789231978231645231564978564978123897123564
200. 123897456456312897789456312312789645645231789978645231231978564564123978897564123
201. 123456897456897312789312456312564789564789231978231564231645978645978123897123645
202. 123897456456312897789456312312789564564231789978564231231978645645123978897645123
203. 123465897456879312789312456312546789564798231978231564231654978645987123897123645
204. 123897465456312879789456312312789546564231798978564231231978654645123987897645123
205. 123456897456897123789231564231564789564789231978312645312645978645978312897123456
206. 123897456456123897789564231231789564564231789978645312312978645645312978897456123
207. 123456897456897123789231645231645789645789231978312564312564978564978312897123456
208. 123897456456123897789645231231789645645231789978564312312978564564312978897456123
209. 123456897456897123789312564312564789564789312978231645231645978645978231897123456
210. 123897456456123897789564312312789564564312789978645231231978645645231978897456123
211. 123456897456897123789312645312645789645789312978231564231564978564978231897123456
212. 123897456456123897789645312312789645645312789978564231231978564564231978897456123
213. 123645978456789231789231456231456789564897312897312564312564897645978123978123645
214. 123978645456231789789456231231789456564312897897564312312897564645123978978645123
215. 123456897456897213789231465231645789645789321978312654312564978564978132897123546
216. 123897456456213897789465231231789645645321789978654312312978564564132978897546123
217. 123564789456789123789231456231456897645897231897312645312645978564978312978123564
218. 123789564456123789789456231231897456645231897897645312312978645564312978978564123
219. 123564789456789123789231456231456978645978231978312645312645897564897312897123564
220. 123789564456123789789456231231978456645231978978645312312897645564312897897564123
221. 123564879456789213789231456231456798645978321978312645312645987564897132897123564
222. 123879564456213789789456231231798456645321978978645312312987645564132897897564123
223. 123564897456789231789231456231456789645978312978312645312645978564897123897123564
224. 123897564456231789789456231231789456645312978978645312312978645564123897897564123
225. 123546798456798132789312456312465879645879321897231645231654987564987213978123564
226. 123798546456132798789456312312879465645321879897645231231987654564213987978564123
227. 123546978456798312789312456312465789645879231897231645231654897564987123978123564
228. 123978546456312798789456312312789465645231879897645231231897654564123987978564123
229. 123564789456789123789312456312456978645978312978231645231645897564897231897123564
230. 123789564456123789789456312312978456645312978978645231231897645564231897897564123
231. 123564789456789123789312456312456897645897312897231645231645978564978231978123564
232. 123789564456123789789456312312897456645312897897645231231978645564231978978564123
233. 123564798456789132789312456312456879645897321897231645231645987564978213978123564
234. 123798564456132789789456312312879456645321897897645231231987645564213978978564123
235. 123564978456789312789312456312456789645897231897231645231645897564978123978123564
236. 123978564456312789789456312312789456645231897897645231231897645564123978978564123
237. 123456978456978312789312456312645789645789231897231645231564897564897123978123564
238. 123978456456312978789456312312789645645231789897645231231897564564123897978564123
239. 123456978456978312789312456312564789564789231897231564231645897645897123978123645
240. 123978456456312978789456312312789564564231789897564231231897645645123897978645123
241. 123546798456798123789312465312465879645879312897231654231654987564987231978123546
242. 123798546456123798789465312312879465645312879897654231231987654564231987978546123
243. 123456978456978213789231465231645789645789321897312654312564897564897132978123546
244. 123978456456213978789465231231789645645321789897654312312897564564132897978546123
245. 123546798456798123789231465231465879645879231897312654312654987564987312978123546
246. 123798546456123798789465231231879465645231879897654312312987654564312987978546123
247. 123546978456798213789231465231465789645879321897312654312654897564987132978123546
248. 123978546456213798789465231231789465645321879897654312312897654564132987978546123

457. 123759486456183729789426153615378942972645318348912675267534891591867234834291567
458. 123759486456183729789426153267534891831297564594861237615378942342915678978642315
459. 123759486456183729789426153615378942342915678978642315267534891831297564594861237
460. 123759486456183729789426153231597864867234591594861237615378942972645318348912675
461. 123759486456183729789426153615378942972645318348912675231597864867234591594861237
462. 123759486456183729789426153231597864867234591594861237615378942342915678978642315
463. 123759486456183729789426153615378942342915678978642315231597864867234591594861237
464. 123759486456183729789426153231597864564831297897264531615378942342915678978642315
465. 123759486456183729789426153615378942342915678978642315231597864564831297897264531
466. 123759486456183729789426153837294561261537894594861237312975648645318972978642315
467. 123759486456183729789426153312975648645318972978642315837294561261537894594861237
468. 123486759456729183789153426534267891867591234291834567312648975645972318978315642
469. 123486759456729183789153426312648975645972318978315642534267891867591234291834567
470. 123759486456183729789426153231597864867234591594861237312975648645318972978642315
471. 123759486456183729789426153312975648645318972978642315231597864867234591594861237
472. 123486759456729183789153426534267891261894537897531264312648975645972318978315642
473. 123486759456729183789153426312648975645972318978315642534267891261894537897531264
474. 123486759456729183789153426231864597564297831897531264312648975645972318978315642
475. 123486759456729183789153426312648975645972318978315642231864597564297831897531264
476. 123759486456183729789426153231597864564831297897264531312975648645318972978642315
477. 123759486456183729789426153312975648645318972978642315231597864564831297897264531
478. 123486759456729183789153426534278691298631574671594238942367815317845962865912347
479. 123486759456729183789153426942367815317845962865912347534278691298631574671594238
480. 123759486456183729789426153267538941931247568548961237615374892872695314394812675
481. 123759486456183729789426153615374892872695314394812675267538941931247568548961237
482. 123759486456183729789426153265374891871295364394861275617538942932647518548912637
483. 123759486456183729789426153617538942932647518548912637265374891871295364394861275
484. 123486759456729183789153426934267815217835964865914237542378691398641572671592348
485. 123486759456729183789153426542378691398641572671592348934267815217835964865914237
486. 123759486456183729789426153265378941971245368348961275617534892832697514594812637
487. 123759486456183729789426153617534892832697514594812637265378941971245368348961275
488. 123486759456729183789153426934278615218635974675914238542367891397841562861592347
489. 123486759456729183789153426542367891397841562861592347934278615218635974675914238
490. 123597864456382719789416352312759486948631275675248931231975648564823197897164523
491. 123864597456719382789352416312486759645971238978235641231648975867593124594127863
492. 123864597456719382789352416312486759645971238978235641231648975564197823897523164
493. 123597864456382719789416352312759486645238971978641235231975648564823197897164523
494. 123946578456718293789235461231469785645871329897352614312694857564187932978523146
495. 123578946456293718789461235231785469645329871897614352312857694564932187978146523
496. 123496758456728193789135462312649875645872319897351624231964587564287931978513246
497. 123758496456193728789462135312875649645319872897624351231587964564931287978246513
498. 123758496456193728789462135937284561261537984548916273672345819815679342394821657
499. 123496758456728193789135462964587231537261984218943576875312649342679815691854327
500. 123496758456728193789135462534267981967581234218943576842379615375612849691854327
501. 123496857456827193789315642615742389342689715978531264231964578564278931897153426
502. 123857496456193827789642315312785649645319782978264531534971268261538974897426153
503. 123496857456827193789315642312649785645782319978531264231964578564278931897153426
504. 123857496456193827789642315312785649645319782978264531231578964564931278897426153
505. 123956478456178923789234561264581739531769284897342615642815397315697842978423156
506. 123956478456178923789234561534761289261589734897342615642815397315697842978423156
507. 123956478456178923789234561534761289261589734897342615312695847645817392978423156
508. 123478956456923178789561234231784569564239781897615342312847695645392817978156423
509. 123956478456178923789234561231569784564781239897342615312695847645817392978423156
510. 123956478456178923789342561542761389361589742897234615634815297215697834978423156
511. 123956478456178923789234615634715289215689734897342561542861397361597842978423156
512. 123956478456178923789342615642715389315689742897234561534861297261597834978423156
513. 123965478456187932789234651634751289215698743897342516542816397361579824978423165
514. 123479856456823179789516243617345982942687315835192467264738591598261734371954628
515. 123856479456179823789243516915387642347612985862495137298534761531768294674921358
516. 123856479456179823789243516534761298261598734978324651642915387315687942897432165
517. 123479856456823179789516243231794568564238791978651324312947685645382917897165432
518. 123856479456179823789243516231568794564791238978324651312685947645917382897432165
519. 123497865456832179789516342312749586564328791978651234231974658645283917897165423
520. 123865497456179832789342516312586749564791328978234651231658974645917283897423165
521. 123856497456197823789234561534761289261589734978342615642915378315678942897423156
522. 123856497456197823789342561542761389361589742978234615634915278215678934897423156
523. 123856497456197823789234615634715289215689734978342561542961378361578942897423156
524. 123856497456197823789342615642715389315689742978234561264571938531968274897423156
525. 123856497456197823789342615642715389315689742978234561534961278261578934897423156
526. 123856497456197823789342615312685749645719382978234561534961278261578934897423156
527. 123497856456823197789615342312749685645382719978561234231974568564238971897156423
528. 123856497456197823789342615312685749645719382978234561231568974564971238897423156
529. 123948567456712389789356412312489756875631294694275831231894675967523148548167923
530. 123948675456712389789356412312489756867531294594267831231894567975623148648175923
531. 123948576456713298789265431231489765645371829897652314312894657564137982978526143
532. 123576948456298713789431265231765489645829371897314652312657894564982137978143526
533. 123894657456721398789365412312489765967513284548276931231948576875632149694157823
534. 123894567456731289789256431231489756975612348648375912312948675867523194594167823
535. 123576849456289713789413256917354682532867194864192537295738461348621975671945328
536. 123849576456713289789256413614387952597162834832594167268435791941678325375921648
537. 123849576456713289789256413231498765975621348648375921312984657867532194594167832
538. 123849576456713289789256413231498765645371928978625341312984657564137892897562134
539. 123576849456289713789413256231765498645928371978341625312657984564892137897134562
540. 123894675456731289789256431231489756967512348548367912312948567875623194694175823
541. 123894567456712389789356412312489756975631248648275931231948675597163824864527193
542. 123894567456712389789356412312489756975631248648275931231948675867523194594167823
543. 123894567456712389789356412312489756645271938978635241231948675867523194594167823
544. 123894567456712389789356412312489756645271938978635241231948675564127893897563124
545. 123567894456389712789412356312756489645938271978241635231675948564893127897124563
546. 123894675456712389789356412312489756967531248548267931231948567875623194694175823
547. 123948567456731289789256431231489756875612394694375812312894675967523148548167923
548. 123948675456731289789256431231489756597362814864517392312894567975623148648175923
549. 123948675456731289789256431231489756867512394594367812312894567975623148648175923
550. 123948675456731289789256431231489756867512394594367812312894567645173928978625143
551. 123948675456731289789256431231489756564317892897562314312894567645173928978625143
552. 123675948456289731789431256231756489564892317897314562312567894645928173978143625
553. 123489756456723189789156423264837591597261834831594267642378915918645372375912648
554. 123489756456723189789156423642378915918645372375912648264837591597261834831594267
555. 123756489456189723789423156297534861531867294864291537915378642372645918648912375
556. 123756489456189723789423156915378642372645918648912375297534861531867294864291537
557. 123756489456189723789423156231567894597834261864291537915378642372645918648912375
558. 123756489456189723789423156915378642372645918648912375231567894597834261864291537
559. 123756489456189723789423156231567894867294531594831267915378642372645918648912375
560. 123756489456189723789423156915378642372645918648912375231567894867294531594831267
561. 123489756456723189789156423264837591531294867897561234642378915918645372375912648
562. 123489756456723189789156423642378915918645372375912648264837591531294867897561234
563. 123489756456723189789156423534297861261834597897561234642378915918645372375912648
564. 123489756456723189789156423642378915918645372375912648534297861261834597897561234

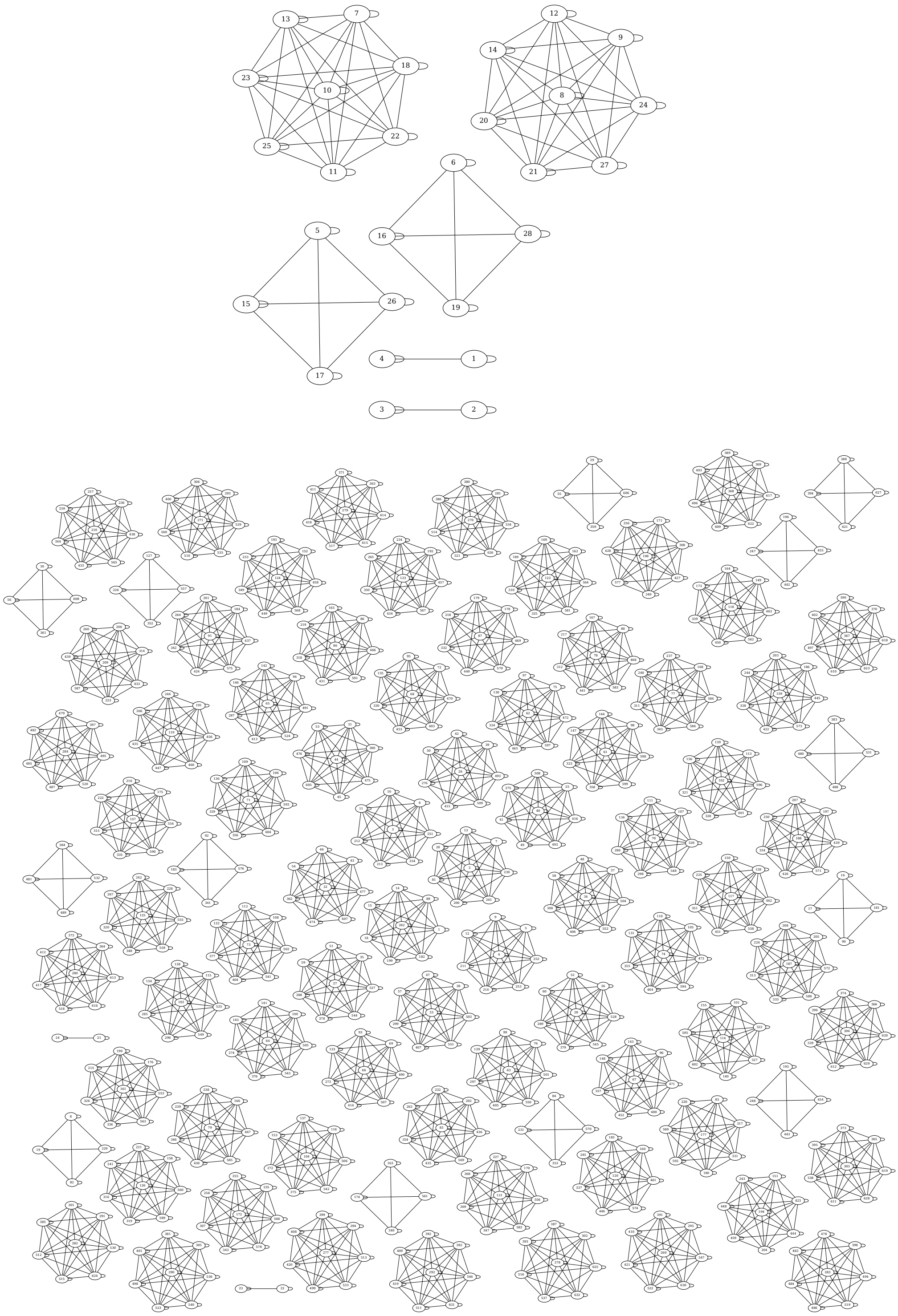
249. 123456978456978123789231645231645789645789231897312564312564897564897312978123456
250. 123978456456123978789645231231789645645231789897564312312897564564312897978456123
251. 123456978456978123789231564231564789564789231897312645312645897645897312978123456
252. 123978456456123978789564231231789564564231789897645312312897645645312897978456123
253. 123564897456789312789312456312456789645978231978231645231645978564897123897123564
254. 123897564456312789789456312312789456645231978978645231231978645564123897897564123
255. 123456978456978123789312645312645789645789312897231564231564897564897231978123456
256. 123978456456123978789645312312789645645312789897564231231897564564231897978456123
257. 123456978456978123789312564312564789564789312897231645231645897645897231978123456
258. 123978456456123978789564312312789564564312789897645231231897645645231897978456123
259. 123564978456789231789231456231456789645897312897312645312645897564978123978123564
260. 123978564456231789789456231231789456645312897897645312312897645564123978978564123
261. 123456978456978231789231456231564789564789312897312564312645897645897123978123645
262. 123978456456231978789456231231789564564312789897564312312897645645123897978645123
263. 123456978456978231789231456231645789645789312897312645312564897564897123978123564
264. 123978456456231978789456231231789645645312789897645312312897564564123897978564123
265. 123546978456798231789231456231465789645879312897312645312654897564987123978123564
266. 123978546456231798789456231231789465645312879897645312312897654564123987978564123
267. 123456978456978132789312546312564789564789321897231654231645897645897213978123465
268. 123978456456132978789546312312789564564321789897654231231897645645213897978465123
269. 123896457456127893789534261264781539531269784978345612615972348342618975897453126
270. 123896457456127893789345261265781349341269785978534612614972538532618974897453126
271. 123896457456127893789534612614782539532619784978345261265971348341268975897453126
272. 123896457456127893789345612615782349342619785978534261264971538531268974897453126
273. 123896457456127893789345612615782349342619785978534261231968574564271938897453126
274. 123896457456127893789345612642719385315682749978534261264971538531268974897453126
275. 123457896456893127789612345312745689645389712978261534231574968564938271897126453
276. 123896457456127893789345612312689745645712389978534261231968574564271938897453126
277. 123896547456217983789354612614782359532169874978435261265971438341628795897543126
278. 123796458456128793789435162615872349342619875897354621264981537531267984978543216
279. 123458796456793128789162435312845679645379812897621354231584967564937281978216543
280. 123796458456128793789435162312679845645812379897354621231967584564281937978543216
281. 123458796456793128789162435934287561267531984518946273642375819875619342391824657
282. 123796458456128793789435162537264981961587234248913576872349615315672849694851327
283. 123548976456793218789261435231485769645379821897612354312854697564937182978126543
284. 123976548456218793789435261231769485645821379897354612312697854564182937978543126
285. 123976458456128973789534261264781539531269784897345612615892347342617895978453126
286. 123976458456128973789534261231769584564281739897345612615892347342617895978453126
287. 123976458456128973789534261264781539531269784897345612642817395315692847978453126
288. 123458976456973128789261534231584769564739281897612345312845697645397812978126453
289. 123976458456128973789534261231769584564281739897345612312697845645812397978453126
290. 123976458456128973789345261265781349341269785897534612614892537532617894978453126
291. 123976458456128973789534612614782539532619784897345261265891347341267895978453126
292. 123976458456128973789345612615782349342619785897534261264891537531267894978453126
293. 123594678456781239789236451231459786947862315865317942312945867598673124674128593
294. 123954678456871329789236541231549786947682135865317492312495867598763214674128953
295. 123594867456781239789236451231459786948672315675318942312945678597863124864127593
296. 123594867456782319789316452312459786948671235675238941231945678597863124864127593
297. 123594867456782319789316452312459786948671235675238941231945678564827193897163524
298. 123594867456782319789316452312459786975638241648271935231945678597863124864127593
299. 123594867456782319789316452312459786645278931978631245231945678564827193897163524
300. 123867594456319782789452316312786459645931278978245631231678945564193827897524163
301. 123594678456782319789316452312459786947861235865237941231945867598673124674128593
302. 123495768456782139789136452312549876597861324864327591231954687948673215675218943
303. 123495768456782139789136452312549876564827391897361524231954687645278913978613245
304. 123768495456139782789452136312876549564391827897524361231687954645913278978245613
305. 123495768456782139789136452634257981975618243218943675842379516367521894591864327
306. 123768495456139782789452136937284651215673948648915273572346819861597324394821567
307. 123786459456129783789453126297834561531267894864591237918375642342618975675942318
308. 123786459456129783789453126918375642342618975675942318297834561531267894864591237
309. 123786459456129783789453126231867594597234861864591237918375642342618975675942318
310. 123786459456129783789453126918375642342618975675942318231867594597234861864591237
311. 123786459456129783789453126231867594564291837897534261918375642342618975675942318
312. 123786459456129783789453126918375642342618975675942318231867594564291837897534261
313. 123459786456783129789126453264537891597861234831294567615348972948672315372915648
314. 123459786456783129789126453615348972948672315372915648264537891597861234831294567
315. 123459786456783129789126453264537891531894267897261534615348972948672315372915648
316. 123459786456783129789126453615348972948672315372915648264537891531894267897261534
565. 123756489456189723789423156297534861531867294864291537915378642348612975672945318
566. 123756489456189723789423156915378642348612975672945318297534861531867294864291537
567. 123756489456189723789423156231567894597834261864291537915378642348612975672945318
568. 123756489456189723789423156915378642348612975672945318231567894597834261864291537
569. 123756489456189723789423156231567894564891237897234561915378642348612975672945318
570. 123756489456189723789423156915378642348612975672945318231567894564891237897234561
571. 123489756456723189789156423264837591597261834831594267618345972942678315375912648
572. 123489756456723189789156423618345972942678315375912648264837591597261834831594267
573. 123489756456723189789156423264837591531294867897561234618345972942678315375912648
574. 123489756456723189789156423618345972942678315375912648264837591531294867897561234
575. 123489756456723189789156423231894567564237891897561234618345972942678315375912648
576. 123489756456723189789156423618345972942678315375912648231894567564237891897561234
577. 123756489456189723789423156837264591261597834594831267972345618315678942648912375
578. 123756489456189723789423156972345618315678942648912375837264591261597834594831267
579. 123489756456723189789156423264837591597261834831594267642378915975612348318945672
580. 123489756456723189789156423642378915975612348318945672264837591597261834831594267
581. 123756489456189723789423156837264591261597834594831267312675948975348612648912375
582. 123756489456189723789423156312675948975348612648912375837264591261597834594831267
583. 123756489456189723789423156837264591261597834594831267312675948645918372978342615
584. 123756489456189723789423156312675948645918372978342615837264591261597834594831267
585. 123756489456189723789423156297534861531867294864291537972345618315678942648912375
586. 123756489456189723789423156972345618315678942648912375297534861531867294864291537
587. 123489756456723189789156423534297861867531294291864537642378915975612348318945672
588. 123489756456723189789156423642378915975612348318945672534297861867531294291864537
589. 123489756456723189789156423534297861867531294291864537642378915315942678978615342
590. 123489756456723189789156423642378915315942678978615342534297861867531294291864537
591. 123489756456723189789156423534297861867531294291864537312948675645372918978615342
592. 123489756456723189789156423312948675645372918978615342534297861867531294291864537
593. 123756489456189723789423156231567894597834261864291537312675948975348612648912375
594. 123756489456189723789423156312675948975348612648912375231567894597834261864291537
595. 123756489456189723789423156231567894867294531594831267312675948975348612648912375
596. 123756489456189723789423156312675948975348612648912375231567894867294531594831267
597. 123756489456189723789423156231567894867294531594831267312675948645918372978342615
598. 123756489456189723789423156312675948645918372978342615231567894867294531594831267
599. 123489756456723189789156423264837591531294867897561234642378915315942678978615342
600. 123489756456723189789156423642378915315942678978615342264837591531294867897561234
601. 123489756456723189789156423534297861261834597897561234642378915315942678978615342
602. 123489756456723189789156423642378915315942678978615342534297861261834597897561234
603. 123489756456723189789156423534297861261834597897561234312948675645372918978615342
604. 123489756456723189789156423312948675645372918978615342534297861261834597897561234
605. 123489756456723189789156423231894567564237891897561234312948675645372918978615342
606. 123489756456723189789156423312948675645372918978615342231894567564237891897561234
607. 123756489456189723789423156231567894564891237897234561312675948645918372978342615
608. 123756489456189723789423156312675948645918372978342615231567894564891237897234561
609. 123489756456723189789156423534278961261934578978561234642397815315842697897615342
610. 123489756456723189789156423642397815315842697897615342534278961261934578978561234
611. 123756489456189723789423156231567948967248531548931267312675894875394612694812375
612. 123756489456189723789423156312675894875394612694812375231567948967248531548931267
613. 123756489456189723789423156231675894875294631694831275312567948967348512548912367
614. 123756489456189723789423156312567948967348512548912367231675894875294631694831275
615. 123489756456723189789156423634278915215834697897615234542378961361942578978561342
616. 123489756456723189789156423542378961361942578978561342634297815215834697897615234
617. 123756489456189723789423156231675948975248631648931275312567894867394512594812367
618. 123756489456189723789423156312567894867394512594812367231675948975248631648931275
619. 123489756456723189789156423634278915215934678978615234542397861361842597897561342
620. 123489756456723189789156423542397861361842597897561342634278915215934678978615234
621. 123765498456189732789432156312576849867394521594821367231657984975248613648913275
622. 123498765456732189789156432312849576564327891897561324231984657645273918978615243
623. 123765498456189732789432156312576849564891327897324561231657984645918273978243615
624. 123765498456189732789432156937254681215678943648913275872346519361597824594821367
625. 123498765456732189789156432634287951215943678978615243542379816361824597897561324
626. 123498765456732189789156432634287951975613248218945673542379816867521394391864527
627. 123498756456723198789165432642379815315842679897651324534287961261934587978516243
628. 123498756456723198789165432312849675645372819897651324231984567564237981978516243
629. 123756498456198723789432165312675849645819372897324651231567984564981237978243516
630. 123498756456723198789165432534287961967531284218946573642379815875612349391854627
631. 123756498456198723789432165937264581261587934548913276872345619315679842694821357
632. 123756498456198723789432165231567984967284531548913276312675849875349612694821357

7. Zahrnutí rotace a transpozice

Na nalezená sudoku aplikujeme 8 symetrií čtverce (rotace, překlápění). Po jejich kanonizaci se dostáváme do jiného nalezeného sudoku. Tímto způsobem se dají shlukovat, viz obrázky na další straně. Za pozornost stojí, že se shluky neskládají jen z 8 sudoku.

8. Závěrem postřeh

Nalezených 28 neizomorfních sudoku pro vnitřní bloky je součástí 632 neizomorfních sudoku pro všechny bloky. Teoreticky tedy bylo možné počítat jen variantu pro všechny bloky a z nalezených 632 sudoku dopočítat těch 28. Tím by se uspořila cca polovina výpočetních času. Tedy řádově mluvíme o polovině ze 7 týdnů počítání na 300 jádrech.



To jsme bohužel na začátku prací nevěděli a ani jako pracovní hypotéza by nám to nejspíš nepomohlo. Zaujatý čtenář si jistě ověří, že oněch 28 sudoku je k nalezení mezi těmi 632.

Celkový počet sudoku, bez ohledu na izomorfismus, je tedy 28, resp. 632, sudoku krát 9!, tedy permutace 9 cifer.

Ačkoliv máme rádi vše open a nejlépe zadarmo, u této úlohy to bez dokoupených a zapůjčených serverů nešlo. Byla to zajímavá zkušenost, mít na stole takto výpočetně náročnou úlohu. Doporučujeme a už hledáme další! Je to návykové…

Poděkování

Za pomoc s výpočetní silou děkujeme Michalu Kaukičovi, Aleši Kozubíkovi a Rudovi Blaškovi (Žilina), Miroslavu Červenkovi (Brno), Tomáši Výmolovi (Zlín), Petru Nevřivovi (Brno) a Jozefu Říhovi (Bratislava). V neposlední řadě Marku Richmanovi z `https://www.cudocompute.com/` za asistenci při využití jejich virtuálních CPU.

Kontaktní adresy

Ing. Pavel Stříž, Ph.D., Nakladatelství Martin Stříž, U Škol 940, Bučovice, okres Vyškov, 685 01, Česká republika,
E-mailová adresa: `pavel@striz.cz`

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc., Katedra matematických metód, Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, Slovenská republika,
E-mailová adresa: `pesko@frcatel.fri.uniza.sk`